XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2014

15 февраля

10 класс

1. Автоматическая межпланетная станция массой 3 тонны обращается вокруг Солнца по орбите с большой полуосью 2 а.е. и эксцентриситетом 0.4. В афелии орбиты в результате кратковременного включения двигателей станции был передан добавочный импульс в том же направлении, в котором станция двигалась в этот момент. Через пять месяцев после этого события станция находилась на том же расстоянии от Солнца, что и в момент включения двигателей. Найдите добавочный импульс, который был передан станции.

Решение:

Из того факта, что добавочный импульс был передан в направлении движения, следует, что увеличилась скорость станции в афелии, а, следовательно, большая полуось орбиты и орбитальный период. В зависимости от величины переданного импульса орбита могла измениться следующим образом:

I) если получившаяся скорость осталась меньше круговой для данного расстояния, то новая орбита также представляет собой эллипс с афелием в этой же точке, но меньшим эксцентриситетом;

II) если получившаяся скорость стала строго равна круговой для данного расстояния, то орбита превратилась в окружность с радиусом, равным афелийному расстоянию прежней орбиты;

III) если скорость стала больше круговой, но меньше параболической, то орбита стала эллиптической, но в данной точке у такой орбиты будет перигелий;

IV) и наконец, если скорость стала равна или больше параболической, то орбита стала параболой или гиперболой с перигелием в точке, где был передан импульс.

Период обращения по новой орбите более чем в два раза превышает 5 месяцев, т.к. он больше периода для старой орбиты, который точно больше 1 года . Таким образом, станция оказалась на том же расстоянии от Солнца, что и в точке либо афелия, либо перигелия новой орбиты, через время заведомо меньшее даже половины периода обращения. Любые конические сечения, кроме окружности, обладают тем свойством, что у них есть выделенная точка (или точки в случае эллипса), расстояние от которых до фокуса минимально (или минимально и максимально). Следовательно ситуация, описанная в условии, может быть только в том случае, если реализуется вариант II.

Таким образом, переданный станции импульс дополняет ее скорость до круговой на данном расстоянии. Известно, что, если $v_{\text{кр}_A}$ — это круговая скорость на расстоянии, равном расстоянию в афелии, то скорость в афелии равна $v_a = v_{\text{кр}_a}\sqrt{1-e}$, где e — эксцентриситет. Следовательно добавочная скорость, переданная станции, равна

$$\Delta v = v_{\text{кр}_A} - v_A = v_{\text{кр}_a} - v_{\text{кр}_A}\sqrt{1-e} = v_{\text{кр}_A}(1-\sqrt{1-e}).$$

Расстояние в афелии для начальной орбиты равно $r_A = a(1+e) = 2(1+0.4) = 2.8$ а.е., следовательно

$$v_{\text{кр}_A} = \frac{30\,\text{км/с}}{\sqrt{2.8}} \approx 18\,\text{км/с}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta v = 18(1 - \sqrt{1 - 0.4}) \approx 18 \cdot 0.2 \approx 3.6\,\text{км/с}.$$

Тем самым добавочный импульс равен

$$\Delta p = m\Delta v = 3 \cdot 10^3 \cdot 3.6 \cdot 10^3 \approx 11 \cdot 10^6\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

2. Оцените максимально возможное падение блеска (в звездных величинах) при прохождении внесолнечной планеты по диску звезды, около которой она обращается. Считать, что звезда похожа на Солнце.

Решение:

Очевидно, что максимальное падение блеска будет в том случае, когда происходит центральное прохождение максимально большой по площади планеты по диску звезды. Если пренебречь потемнением диска звезды к краю и считать, что звезда и планета находятся от нас на практически одинаковом расстоянии, то можно записать

$$\Delta m = -2.5\ \lg \frac{S_{\text{зв}} - S_{\text{пл}}}{S_{\text{зв}}} = -2.5\ \lg \frac{R_{\text{зв}}^2 - R_{\text{пл}}^2}{R_{\text{зв}}^2} = -2.5\ \lg \left(1 - \left(\frac{R_{\text{пл}}}{R_{\text{зв}}}\right)^2\right).$$

Радиус планеты можно оценить примерно таким образом. Максимальная масса тела, при которой оно еще остается планетой, оценивается примерно в 10 масс Юпитера. В качестве разумной оценки плотности можно взять плотность самого Юпитера. Тогда радиус такой планеты будет примерно в $\sqrt[3]{10} \approx 2$ раза больше радиуса Юпитера. Так как Юпитер по размеру в 10 раз меньше Солнца, то эта планета будет в 5 раз меньше своей звезды. Тогда

$$\Delta m = -2.5\ \lg \left((1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = -2.5\,\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{25}\right)}{\ln 10} \approx -2.5\,\frac{-1/25}{2.3} = \frac{1}{23} \approx 0^m.04.$$

В принципе, можно сделать более жесткую оценку радиуса. В качестве максимально возможной массы планеты в литературе обычно приводится величина 13 масс Юпитера. Если еще и понизить плотность планеты, например (для простоты счета) до плотности Сатурна, которая в два раза меньше плотности Юпитера, то максимальный радиус планеты можно оценить в $2\sqrt[3]{13} \approx 5$ радиусов Юпитера, что только в 2 раза меньше радиуса Солнца. Тогда оценка падения блеска будет большей:

$$\Delta m = -2.5 \lg \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -2.5\ \lg \frac{3}{4} =$$
$$= -2.5\ (\lg 3 - \lg 4) = 2.5\,(2 \lg 2 - \lg 3) \approx 2.5 \cdot (0.6 - 0.5) = 0^m.25.$$

3. В результате столкновения двух звезд главной последовательности, каждая из которых имела массу, равную 2 массам Солнца, образовалась звезда (также главной последовательности). Как оказалось, светимость получившейся звезды в точности равнялась суммарной светимости двух столкнувшихся звезд. Найдите массу образовавшейся звезды.

Решение:

Как несложно догадаться, решение задачи не сводится к утверждению, что $2 + 2 = 4$.

Для звезд главной последовательности малых масс (к которым относятся и исходные, и получившаяся звезды) справедливо следующее приближенное соотношение между массой и светимостью:

$$L \propto \mathfrak{M}^4.$$

Поэтому, если масса каждой из исходных звезд равна $\mathfrak{M}_0$, а светимость — L_0, то масса получившейся звезды

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sqrt[4]{\frac{L}{L_0}} = \mathfrak{M}_0 \sqrt[4]{2} \approx \mathfrak{M}_0 \sqrt{1.4} \approx 1.2\,\mathfrak{M}_0 = 1.2 \cdot 2 = 2.4\,\mathfrak{M}_\odot.$$

Оставшаяся часть массы исходных звезд при столкновении должна была рассеяться в пространстве и в итоговую звезду не попасть.

4. Оцените, на сколько звездных величин отличается максимально и минимально возможный блеск Меркурия, находящегося в максимальной элонгации. Эксцентриситет орбиты Меркурия равен 0.2, большая полуось орбиты — 0.4 а.е.

Решение:

Ясно, что блеск Меркурия зависит как от расстояния от него до Солнца, так и от расстояния от него до Земли, а точнее от произведения их обратных квадратов. В принципе еще есть зависимость от фазы, но если мы рассматриваем Меркурий в афелии или перигелии его орбиты, то в этих точках касательная к эллипсу орбиты, проведенная от Земли, перпендикулярна радиус-вектору Меркурия, а значит фаза в обоих этих случаях будет равна 0.5. Для того, чтобы исключить фазовый эффект, а также избежать решения очень сложной математически задачи минимизации и максимизации произведения обратных квадратов расстояний, рассмотрим разность звездных величин Меркурия в афелийной и перигелийной максимальной элонгации.

Обозначим r_{Π} — расстояние от Меркурия до Солнца в перигелии его орбиты, r_A — расстояние в афелии, a — большую полуось орбиты Меркурия, e — ее эксцентриситет. Тогда $r_{\Pi} = a(1-e) \approx 0.3$ а.е., $r_A = a(1+e) \approx 0.5$ а.е., а

$$\Delta m = -2.5 \lg \left(\frac{1 - r_{\Pi}^2}{1 - r_A^2} \cdot \frac{r_{\Pi}^2}{r_A^2} \right) \approx -2.5 \lg \left(\frac{1 - 0.09}{1 - 0.25} \cdot \frac{0.09}{0.25} \right) \approx -2.5 \lg \frac{1}{2} \approx 0^m.8.$$

5. На западном побережье Африки не очень далеко друг от друга находятся два города: Либревиль (географические координаты $0°24'$ с.ш. и $9°28'$ в.д.) и Бата ($1°51'$ с.ш. и $9°45'$ в.д.). В какие примерно дни года заход Солнца в них происходит одновременно?

Решение:

В дни равноденствий большой круг на Земле, являющийся линией раздела света и тьмы, — так называемый терминатор — располагается перпендикулярно экватору Земли. В дни солнцестояний — под углом $23°.5$ к своему равноденственному положению (т.е. перпендикуляру к экватору) по разные стороны от него, касаясь в двух противоположных точках северного и южного полярных кругов. При этом в день летнего солнцестояния (т.е. около 22 июля) терминатор наклонен таким образом, что оставляет полностью освещенной северную полярную область, а в день зимнего — южную (см. рис. 1). В другие дни года терминатор занимает среднее положение между этими двумя крайними и угол наклона терминатора к перпендикуляру к экватору равен по модулю склонению Солнца в искомый день.

Для того, чтобы закат Солнца проходил в двух точках Земли одновременно, необходимо, чтобы они в данный день располагались на закатной половине терминатора. Рассмотрим,

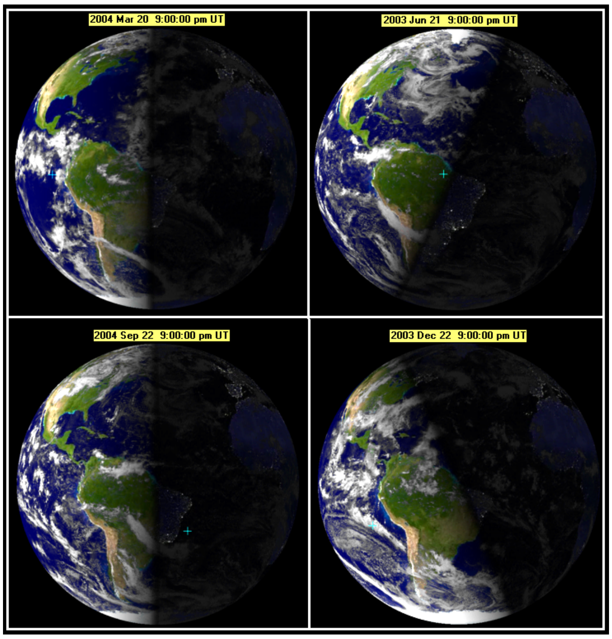

Рис. 1:

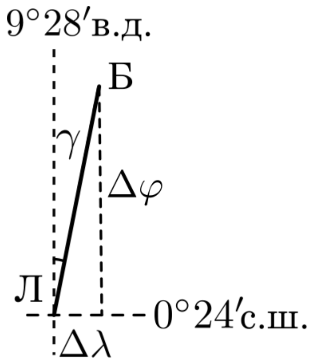

Рис. 2:

как расположены города из условия относительно линии, перпендикулярной экватору, т.е. меридиана (см. рис. 2). Терминатор в исходные дни года отмечен жирной линией, проходящей через точки Л и Б, и наклонен под углом γ к меридиану. Так как города расположены очень близко, можно пренебречь сферичностью Земли и для нахождения γ пользоваться евклидовой геометрией:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \operatorname{arctg}\frac{45' - 28'}{111' - 24'} = \operatorname{arctg}\frac{17}{87} \approx 0.2 \text{ рад} \approx 11^\circ.$$

Таким образом, в искомые дни закатный терминатор отклонен к востоку от меридиана на угол порядка 11°. Следовательно, дело происходит между весенним и осенним равноденствиями (см. рис. 1), т.е. склонение Солнца $\delta_\odot$ в эти дни положительно и равно примерно 11°.

Если взять за точку отсчета дней в году дату весеннего равноденствия, то изменение склонения Солнца с номером дня года можно аппроксимировать следующим образом:

$$\delta_\odot = \varepsilon \cdot \sin d,$$

где $\varepsilon \approx 23^\circ.5$ — угол наклона эклиптики к экватору Земли, а d — угол в градусах, равный по абсолютной величине номеру дня (т.к. количество градусов в полной окружности и количество дней в году практически равны).

Отсюда находим номера нужных дней:

$$\sin d = \frac{\delta_{\odot}}{\varepsilon} \approx \frac{11}{23.5} \approx 0.5,$$

откуда $d = 30$ или $d = 150$. Таким образом, заход Солнца в этих городах происходит одновременно примерно через месяц после весеннего равноденствия и примерно за месяц до осеннего, т.е. около 20 апреля и 22 августа.